

Оценка экзотических опционов методом Монте-Карло (часть 2)

Автор: Михаил Глухов, к.э.н., старший преподаватель кафедры ценных бумаг в Финансовой академии при Правительстве РФ

Мы продолжаем тему, начатую в предыдущем номере. На этот раз я постараюсь показать, как использовать метод Монте-Карло для оценки любых произвольных экзотических опционов, выполняя расчеты в Excel¹. Как и прежде, в изложении материала мы будем ориентироваться на читателей, обладающих базовыми математическими знаниями на уровне экономических ВУЗов.

В предыдущем номере журнала мы рассмотрели суть метода Монте-Карло и его применение для оценки стандартных опционов. В соответствии с данным методом, стоимость опциона определяется как дисконтированная цена математического ожидания выплаты, которую он генерирует. Мы показали, каким образом генерируется случайная будущая цена акции в соответствии с моделью «геометрического броуновского движения», лежащего в основе формулы Блэка-Шоулза. Мы также отметили, что при генерировании случайной цены в качестве ожидаемой доходности необходимо использовать безрисковую ставку, следуя концепции «мира, нейтрального к риску» (risk-neutral world).

¹ Все расчеты, приводимые в статье, содержатся в файле Excel, доступном для скачивания с сайта <http://www.mgsoft.ru/ru/Download.aspx?url=ExoticOptionsMonteCarlo.xls>. На сайте также доступен для бесплатного скачивания калькулятор экзотических опционов МГ Софт, производящий оценку описываемым в статье методом Монте-Карло.

Path-dependent опционы

Прежде чем переходить к вопросам оценки экзотических опционов, нам следует разобраться хотя бы приблизительно, что это за инструмент.

По сути, экзотическими называются любые опционы, которые не являются стандартными (ванильными). Например, это могут быть бинарные, барьерные, азиатские, lookback («с оглядкой назад») и многие другие инструменты.

При этом выделяют path-dependent (выплата по которым зависит от ценового пути базового актива) и non path-dependent опционы (выплата зависит только от цены базового актива в дату истечения).

Стандартный опцион является non path-dependent, поскольку тот выигрыш, который владелец контракта получит в дату истечения, зависит только от конечной цены базового актива (БА). Например, выигрыш по Call на акцию «Газпрома», истекающему через 1 год, будет зависеть только от того, сколько акция будет стоить через 1 год, и определяться по формуле $\text{Max}(\text{цена акции «Газпрома» через 1 год} - \text{Strike}; 0)$. Выигрыш никак не будет зависеть от цены «Газпрома» в любой другой момент времени.

Азиатский опцион – пример path-dependent инструмента, выплата по которому определяется по следующей формуле:

$$\text{Asian Option Payoff} = \text{Max}(P_1 - P_{\text{average}}; 0),$$

где P_1 – цена БА на дату истечения, P_{average} – средняя цена БА в течение срока жизни опциона.

Можно сказать, что данный контракт дает право приобрести БА по средней цене, наблюдавшейся в течение срока жизни инструмента.

Очевидно, что выигрыш его владельца зависит не только от цены БА на дату истечения, но и от стоимости последнего в течение

Табл. 1 Параметры оцениваемого азиатского опциона

Параметр	Значение
Тип азиатского опциона	Азиатский опцион с плавающим страйком (floating-strike), т. е. с выплатой $\text{Max}(P_1 - P_{\text{average}}; 0)$
Страйк опциона	Не фиксируется при заключении контракта, а рассчитывается в дату истечения как средняя цена базового актива между датами наблюдения
Дата заключения опциона (оцениваем опцион именно в эту дату)	1 января 2009 года
Дата истечения опциона	1 января 2010 года (срок опциона – 1 год)
Call / Put	Call
Даты наблюдения (monitoring dates)	24.03.2009 30.05.2009 11.06.2009 03.08.2009 01.09.2009 21.11.2009
Текущая цена акции	100 рублей
Волатильность акции	30%
Безрисковая процентная ставка	6%

Табл. 2 Пример сгенерированного случайного временного ряда

Дата	Дней с предыдущей датой	Лет с предыдущей датой	Случайная доходность	Цена акции, руб
1.01.2009				100,00
24.03.2009	82,00	0,2247	4,61%	104,72
30.05.2009	67,00	0,1836	25,08%	134,57
11.06.2009	12,00	0,0329	11,78%	151,39
3.08.2009	53,00	0,1452	-1,38%	149,32
1.09.2009	29,00	0,0795	-3,42%	144,30
1.01.2010	122,00	0,3342	4,31%	150,66
Средняя цена между датами наблюдения (с 24.03.09 по 1.09.09)				136,86
Выплата по азиатскому опциону = $\text{Max}(150,66 - 136,86; 0)$				13,80

срока жизни опциона, так как эти котировки используются для расчета средней цены. Азиатский опцион относится к категории инструментов, зависящих от «пути», по которому следует стоимость базового актива до момента экспирации.

Даты наблюдения цены

При заключении азиатского опциона контрагентам необходимо оговорить точный порядок расчета средней цены акции. Прежде всего, следует решить, в какие моменты времени будет происходить наблюдение стоимости БА для

целей расчета среднего значения. Например, среднее можно рассчитывать на основе ежедневных цен закрытия либо на основе цен в 15:00 каждую среду, либо даже, теоретически, на основе цен всех заключенных сделок.

Даты, в которые производится «считывание» стоимости БА, называются датами наблюдения (monitoring dates). Они могут быть распределены равномерно, например, чередоваться через 1 день, 3 дня, 1 неделю и т. д. (данный промежуток называется частотой наблюдения – monitoring frequency), либо быть совершенно произволь-



Рис. 1 План оценки опциона методом Монте-Карло

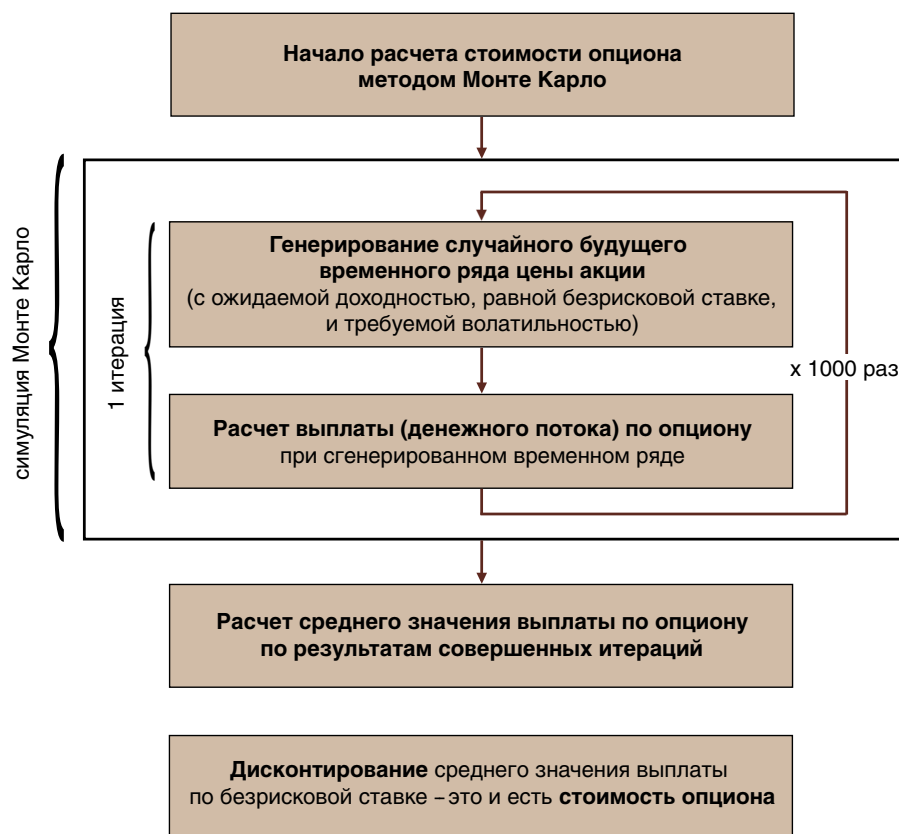


Табл. 3 Результаты оценки азиатского опциона методом Монте-Карло в Excel

Итерация	Выплата по азиатскому опциону
1	13,8042
2	5,5780
3	0,0000
4	13,8602
5	6,4337
6	0,0000
7	0,0000
8	34,4745
9	0,0000
10	16,8721
...	11,5784
5000	2,4889
Среднее значение выплаты по азиатскому опциону	10,0424
Дисконтированное среднее значение выплаты (стоимость опциона)	9,4575

ными. Так, никто не мешает контрагентам заключить азиатский опцион, в котором средняя цена рассчитывается между котировками закрытия акций 24 марта, 30 мая, 2 и 11 июня, а также 2 июля. Ситуация же, когда для расчета средней используются цены всех заключаемых сделок, называется **непрерывным наблюдением** (continuous monitoring).

Очевидно, что от того, на основе какого набора дат наблюдения рассчитывается средняя цена, зависит и стоимость опциона.

В теоретических моделях чаще всего исходят из непрерывного наблюдения цены (для азиатских опционов с непрерывным наблюдением даже существуют аналитические формулы), на практике же чаще всего используется дискретный набор дат, равноотстоящих друг от друга.

Оценка азиатского опциона

Продemonстрируем, как с помощью метода Монте-Карло можно оценить азиатский опцион со следующими параметрами (см. табл. 1).

Представим себе, что сегодня 1 января 2009 года, мы будем оценивать стоимость опциона именно на эту дату. Для упрощения ситуации не будем учитывать выходные и праздничные дни, а станем считать, что акция торгуется 365 дней в году. Обратим внимание на то, что у нашего азиатского опциона **совершенно произвольный набор дат наблюдения**. Отметим также, что дата его истечения не входит в набор дат наблюдения, то есть стоимость акции 1 января 2010 года не используется для расчета средней цены. Тем не менее, конечная стоимость влияет на выплату по опциону, поскольку последняя определяется как разница между конечной и средней ценами.

Оценка подобного инструмента методом Монте-Карло мало отличается от оценки этим же методом ванильного опциона (что было рас-

смотрено в прошлом номере журнала). Разница лишь в том, что если для ванильного опциона нам было достаточно генерировать случайную цену акции в дату истечения, то для азиатского нам необходимо генерировать **случайный временной ряд**, содержащий котировки акции во все даты наблюдения (т. е. выплата по азиатскому опциону зависит от этих цен). В таблице 2 приводится пример сгенерированного случайного временного ряда цены акции с расчетом соответствующей выплаты по азиатскому опциону.

Средняя стоимость, рассчитанная по ценам в даты наблюдения, оказалась равной 136,86 рубля. Конечная стоимость (P1), то есть цена на 1 января 2010 года, оказалась равной 150,66 рубля. Соответственно, платеж по азиатскому опциону в этом случае составил $\text{Max}(P_1 - P_{\text{average}}; 0) = \text{Max}(150,66 - 136,86; 0) = 13,80$ рубля.

Каким образом был сгенерирован данный временной ряд? В

Табл. 4 Стоимость азиатского опциона, рассчитанная различным ПО

Использованное программное приложение	Количество итераций Монте-Карло	Стоимость азиатского опциона, рублей
Microsoft Excel	5 тыс.	9,4575
MG Soft Exotic Options Calculator	1 млн	9,6637
Расхождение в %		2,13%

столбце «Случайная доходность» использовалась функция VBA GenerateRandomReturn для генерирования случайной доходности, которую мы рассмотрели в предыдущей статье. Для формирования случайного временного ряда необходимо сгенерировать несколько случайных доходностей, а затем на их основе получить цены временного ряда.

План оценки path-dependent опциона представлен на рисунке 1. Он практически ничем не отличается от рассмотренного в прошлом номере журнала плана оценки ванильного опциона методом Монте-Карло. Проведя симуляцию Монте-Карло из 5000 итераций в

Excel, мы получили результаты, приведенные в таблице 3.

Каждая итерация соответствует одному сгенерированному случайному временному ряду. Среднее значение выплаты по опциону, полученное при 5000 временных рядах, оказалось равным 10,0424 рубля. Продисконтировав данное значение по ставке 6%, мы получили стоимость нашего азиатского опциона – **9,4575 рубля**.

Следует отметить, что 5000 – слишком маленькое количество итераций для точной оценки азиатского опциона. Поскольку Excel не очень хорошо подходит для совершения большого числа итераций (это занимает слишком много

КРИЗИС СОКРАТИЛ ВАШИ ДОХОДЫ?!

НАУЧИТЕСЬ ЗАРАБАТЫВАТЬ НА МИКРОКОЛЕБАНИЯХ РЫНКА

Семинары Андрея Беритца в Москве каждый месяц, в течение 2009 года

Скальпинг

- равномерный денежный прирост
- защита от единовременной потери денег

Андрей Беритц — mimitroll.

Призер ежегодного конкурса РТС «Лучший частный инвестор 2003 года». Победитель в номинации «Лучший трейдер миллионер 2007 года».

Узнайте, как это делать без вреда для вашего здоровья

организатор



реклама

Подробная информация на сайте www.dereX.ru
По телефону: 8 (495) 733-95-12
Электронная почта: pr@dereX.ru

времени), предпочтительнее либо запрограммировать оценку на VBA, C++ или C#, либо использовать специализированные программы-калькуляторы, например, **Калькулятор экзотических опционов МГ Софт** (который может быть бесплатно скачан с сайта mgsoft.ru). Стоимость нашего азиатского опциона, рассчитанная на основе 1 млн итераций с помощью данного калькулятора, получилась равной **9,6637 рубля** (см. рис. 2). Расхождение с Excel составило, таким образом, около **2,13%**. Сравнение результатов расчета приводится в таблице 4. Следует отметить, что Калькулятор опционов МГ Софт позволяет указывать произвольный набор дат наблюдения опциона, большинство других программ подобного рода такую возможность не предоставляет.

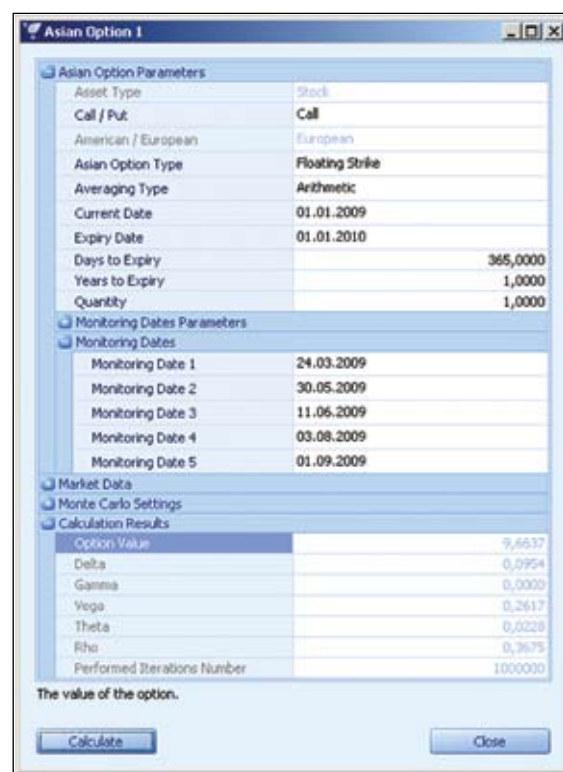
Экзотика и суперэкзотика

Мы продемонстрировали, как оценить с помощью метода Монте-Карло азиатский опцион. Оценка любых других path-dependent контрактов производится аналогичным образом. Отличие будет состоять лишь в различном расчете выплаты по опциону, т.к. у каждого инструмента собственная «платежная функция», своя формула, по которой рассчитывается выплата, получаемая его владельцем. Собственно говоря, различные опционы отличаются только платежной функцией.

Помимо азиатских, другими распространенными path-dependent опционами являются барьерные и lookback («с оглядкой назад»). В силу ограниченного объема статьи мы не будем детально описывать условия данных инструментов, эту информацию можно легко найти в различных источниках.

Рассмотрим, однако, как можно оценить **стоимость «супер-**

Рис. 2 Оценка азиатского опциона с помощью Калькулятора экзотических опционов МГ Софт



экзотического» опциона, имеющего следующую платежную функцию.

$$Super\ Exotic\ Option\ Payoff = \max(P_{average} - P_{min} + \sin(P_1); 0),$$

где $P_{average}$ – средняя цена акции, P_{min} – минимальная стоимость акции, $\sin(P_1)$ – синус от конечной цены базового актива (в градусах).

Средняя и минимальная стоимость рассчитываются на основе цен в оговоренные при заключении контракта даты наблюдения. Будем считать, что они такие же, как и у ранее рассмотренного азиатского опциона.

Описанный инструмент обладает чертами как азиатского (т.к. выплата зависит от средней цены), так и lookback опциона (т.к. выплата зависит от минимальной цены акции). Кроме того, мы добавили в него совершенно экзотический компонент – синус от конечной цены БА. Хотя такой опцион вряд

ли имеет смысл, никто не может запретить двум контрагентам заключить подобную сделку на внебиржевом рынке. И, что самое главное, существует возможность рассчитать его справедливую стоимость методом Монте-Карло.

Проведя 5000 итераций в Excel, мы получили, что стоимость данного опциона составляет **11,1992 рубля**.

Монте-Карло в Excel

Остановимся на вопросе, каким образом можно производить симуляцию Монте-Карло с помощью Excel.

1) Многократный ввод формулы случайной цены (для каждой итерации). Первый, самый простой способ мы использовали для оценки ванильного опциона в предыдущей статье. Поскольку ванильный опцион зависит только от конечной цены БА,

в рамках каждой итерации мы генерировали только конечную цену акции. Каждая итерация была представлена у нас отдельной строкой Excel, в одной из ячеек которой находилась формула генерирования случайной стоимости бумаги.

Однако данный подход начинает давать сбои, как только у нас возникает необходимость оценить path-dependent инструмент. В этом случае в рамках каждой итерации нам нужно генерировать временной ряд, т.е. набор цен. Конечно, здесь можно применить тот же подход, однако удобнее использовать таблицы подстановки.

2) Использование таблиц подстановки. Таблицы подстановки в Excel были задуманы для проведения what-if анализа, однако мы обнаружили, что их очень удобно использовать для проведения симуляции Монте-Карло. Для этого случайный временной ряд достаточно поместить на отдельный лист, а итерации будут

совершаться в таблице подстановки.

В силу ограниченного объема нет возможности описать реализацию этого подхода в данной статье, но интересующиеся читатели могут изучить прилагаемый файл Excel, в котором реализована симуляция Монте-Карло на основе именно таблицы подстановки.

3) Написание кода VBA / C++ / C#. Как уже неоднократно отмечалось, симуляция Монте-Карло в Excel происходит достаточно медленно. Для существенного ускорения расчетов необходимо писать собственный программный код на одном из языков программирования. Одним из самых простых решений в данном случае является программирование на VBA (Visual Basic for Applications). Этот язык встроен в Excel, является простым и может быть достаточно быстро освоен практически любым пользователем.

Конечно, лучше всего программировать функции оценки деривативов на C++ или же на более современном и удобном языке C#. Тем же, кто не хочет заниматься программированием, можно попросить использовать готовые функции оценки или специализированные программы, вроде уже упоминавшегося Калькулятора экзотических опционов МГ Софт.

Дополнительные вопросы

Представим, что в банк пришел клиент, который пожелал приобрести очень экзотический опцион. Банк оценил его справедливую стоимость с помощью метода Монте-Карло, прибавил к этой цене некоторый спрэд и продал инструмент клиенту.

Что дальше? Чтобы вне зависимости от динамики цены акции расплатиться с клиентом в дату истечения опциона, не понести при этом убытков и заработать прибавленный спрэд, банку необходимо **хеджировать** проданный контракт по дельте в течение всего срока его существования. Таким образом,

кроме расчета стоимости опциона, необходимо также уметь оценивать его дельту и другие «греки». Метод Монте-Карло позволяет решать и эти задачи, однако этот вопрос мы оставляем за рамками данной статьи.

Однако важно отметить, что любые, самые экзотические инструменты с большей или меньшей погрешностью могут быть захеджированы и «воспроизведены» с помощью стратегии дельта-нейтрального хеджирования. Конечно же, на практике хеджирование опционов сталкивается с целым рядом трудностей, которые отсутствуют в теоретическом мире Блэка-Шоулза: непостоянство волатильности, недостаточная ликвидность базового актива, дискретное хеджирование и многие другие. При этом хеджирование большинства экзотических опционов еще более проблематично. Но это совершенно отдельный класс вопросов, рассматривать которые мы здесь не будем.

Отметим также, что наибольшую ценность экзотические опционы часто имеют не в виде самостоятельных инструментов, а в составе **структурированных продуктов**. Например, скомбинировав бескупонную облигацию (или депозит) и азиатский опцион Call, можно получить продукт, гарантирующий возврат капитала и генерирующий доходность, пропорциональную средней доходности БА. Такой продукт за счет более низкой стоимости азиатских опционов по сравнению со стандартны-

ми будет обладать более высоким коэффициентом участия.

Заключение

Метод Монте-Карло является одним из наиболее распространенных, универсальных и при этом доступных для понимания методов оценки практически любых экзотических опционов (однако он плохо подходит для оценки американских и других опционов с возможностью досрочного истечения). Метод исходит из того, что стоимость контракта равна математическому ожиданию его выплаты, дисконтированному по безрисковой ставке (при ожидаемой доходности базового актива также равной безрисковой ставке).

Оценить любой опцион таким образом можно даже с помощью Excel, хотя это и не самый удобный подход. Способность оценить экзотические опционы открывает перед банком или инвестиционной компанией возможность котирования данных инструментов и выпуска структурированных продуктов, построенных с их использованием.

Все расчеты, приведенные в данной статье, содержатся в файле Excel, который может быть скачан по адресу www.mgsoft.ru/Download.aspx?url=ExoticOptionsMonteCarlo.xls. Данный файл позволяет оценивать стоимость различных экзотических опционов методом Монте-Карло. Если у Вас возникнут вопросы по статье, вы можете обратиться к автору по адресу mikhail.glukhov@mgsoft.ru или mikhail@glukhov.ru. F&O

RAINBOW ОПЦИОНЫ

Мы говорили только об опционах, имеющих один базовый актив. Однако существуют инструменты, выплата по которым зависит от нескольких БА, они называются multi-asset или «радужными» (rainbow). Подобный опцион может быть привязан, например, к стоимости двух акций и иметь выплату, равную $\max[\max(S_1, S_2) - \text{Strike}; 0]$, где S_1 и S_2 – цены двух акций в дату истечения контракта.

Как же происходит оценка этих опционов с помощью метода Монте-Карло? Точно таким же образом. Однако генерировать необходимо уже одновременно несколько коррелированных случайных временных рядов. Соответственно, стоимость радужных опционов зависит уже не только от волатильности отдельных БА, но и от корреляции между ними. Вопросы оценки подобных инструментов выходят за рамки данной статьи.