

Оценка опционов методом Монте Карло

Автор: Михаил Глухов, к. э. н., старший преподаватель кафедры ценных бумаг в Финансовой академии при Правительстве РФ, генеральный директор ООО «МГ Софт».

Для оценки стандартных ванильных опционов существует всем известная формула Блэка-Шоулза. Но что делать, если нужно оценить стоимость азиатского, барьерного или другого экзотического опциона, для которого не существует готовой аналитической формулы? В этом случае необходимо использовать один из численных методов оценки опционов, например, метод Монте Карло, которому и посвящена данная статья.

В России существует уже достаточно развитый рынок стандартных опционов. Рынок экзотических опционов и структурированных продуктов, построенных на их основе, в нашей стране пока развит очень слабо. Одна из причин этого явления состоит в том, что немногие участники рынка умеют оценивать такие продукты.

В данной статье будет рассмотрено использование метода Монте Карло для оценки опционов с использованием Excel. В этом номере будет показано, как использовать метод Монте Карло для оценки стандартных опционов. В следующем мы посмотрим, как его применять для оценки любых экзотических опционов.

Вопросам оценки деривативов посвящено много зарубежных трудов. Однако те, кто держал подобную литературу в руках, часто приходили в ужас от обилия математических формул и непонятных терминов. Действительно, для полноценного понимания теории оценки опционов необходимо иметь образование на уровне мехмата. Что же делать тем, кто такого образования не имеет?

Данная статья нацелена как раз на такую категорию читателей. В

ней сделана попытка изложить материал таким образом, чтобы любой читатель, знакомый с математикой на уровне экономических ВУЗов, после прочтения статьи смог использовать метод Монте Карло для оценки опционов.

Методы оценки опционов

Существующие методы оценки опционов (как стандартных, так и экзотических) можно разделить на две основные группы.

1) **Аналитические методы**, т.е. оценка с помощью математически выведенных формул, которые позволяют мгновенно получить стоимость опциона. Формула Блэка-Шоулза для оценки стандартных европейских опционов – пример такой формулы. Аналитические формулы, однако, имеются лишь для очень ограниченного набора экзотических опционов: бинарных, простейших видов барьерных и азиатских, а также некоторых других. Поэтому в абсолютном большинстве приходится использовать численные методы оценки.

2) **Численные методы** включают в себя биномиальный метод, метод конечных разностей и метод Монте Карло. Достоинс-

тво их в том, что они позволяют оценить стоимость любых, самых экзотических опционов и деривативов. Однако точность этих методов обычно не является совершенной. Кроме того, они требуют большего объема вычислений и времени на получение результата.

Метод Монте Карло

В данной статье мы рассмотрим лишь один из численных методов оценки опционов – Монте Карло. Он заключается в оценке математического ожидания выплаты, которую сгенерирует опцион для его владельца, путем многократного генерирования возможных ценовых путей движения акции. Суть метода можно продемонстрировать на примере игрального кубика. Представим себе, что перед нами стоит задача определения математического ожидания (проще говоря – среднего значения) числа очков, выпадающих на кубике. Каким образом можно решить эту задачу?

Аналитически, то есть путем суммирования значений на гранях кубика, умноженных на вероятность выпадения соответствующей грани, т. е. $1/6 \times 1 + 1/6 \times 2 + \dots + 1/6 \times 6 = 3,5$ (если кубик является совершенным, и вероятность выпадения любой грани рав-

на $1/6$). Также можно решить задачу численно, с помощью метода Монте Карло. Для этого нам нужно будет бросить кубик, например, 1 млн раз и рассчитать среднее значение числа выпавших очков в результате этих экспериментов. Это значение может получиться равным, например, 3,497 или 3,504, т. е. оно будет очень близким к истинному матожиданию, но некоторая погрешность будет иметься. При этом, чем больше бросков будет совершено, тем точнее будет результат.

Каждый отдельный бросок кубика называется **итерацией**. Полный набор итераций образует **симуляцию** Монте Карло. Оценка опциона методом Монте Карло выглядит похожим образом: нам необходимо рассчитать, какую выплату (payoff) в среднем сгенерирует опцион в дату истечения.

Генерирование случайной цены

В случае с кубиком мы совершали бросок, ждали некоторое время, пока кубик перестанет вертеться и остановится, и записывали количество выпавших очков. Каким образом происходит «бросок» в случае акции?

Генерирование случайного значения будущей цены акции происходит с помощью следующей формулы:

$$S_t = S_0 \times \exp\left(\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t + \sigma\sqrt{t} \times N_{0,1}\right),$$

где t – будущий момент времени в годах ($t = 0$ – текущий момент времени, $t = 1$ – время через 1 год), S_t – цена акции в будущий момент времени t ,

S_0 – текущая цена акции,

μ – математическое ожидание доходности акции, выраженной в % годовых (то, что чаще всего принято называть «ожидаемой доходностью» акции),

σ – стандартное отклонение доходности акции, выраженной в % годовых (данную величину чаще всего называют «волатильностью»),

$\exp(x)$ – функция экспоненты, т.е. число e (равное примерно 2,72), возведенное в степень x ,

$N_{0,1}$ – случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение (с нулевым матожиданием и стандартным отклонением, равным 0).

Ту часть формулы, которая находится внутри \exp , можно считать случайной доходностью акции (но не арифметической, а «логарифмической», то есть рассчитываемой через $\ln(P_1/P_0)$). Данная формула соответствует общепринятой модели движения цены акции, которая лежит в основе модели Блэка-Шоулза и многих других моделей оценки деривативов, и является одним из «столпов» современной деривативной теории. Математически данная формула является решением стохастического дифференциального уравнения, описывающего движение цены акции.

Чтобы по-настоящему понять эту формулу и вывести ее математически, необходимо обладать глубокими знаниями в области

теории вероятности, случайных процессов и других дисциплинах (т. е. в идеале иметь образование мехмата, со специализацией в области теории вероятностей). Однако, к счастью, для наших практических целей нам нет необходимости ничего выводить и доказывать, мы можем ее использовать для решения



Каждый отдельный бросок кубика называется **итерацией**. Полный набор итераций образует **симуляцию** Монте Карло. Оценка опциона методом Монте Карло выглядит похожим образом: нам необходимо рассчитать, какую выплату (payoff) в среднем сгенерирует опцион в дату истечения.

Табл. 1 Данные для оценки опциона на акции «Газпрома»

Страйк опциона	100 рублей
Срок опциона	1 год
Call / Put	Call
Текущая цена акции	100 рублей
Волатильность акции	30%
Безрисковая процентная ставка	6%
Стоимость опциона по формуле Блэка-Шоулза	14,72

наших конкретных практических задач.

Следует отметить, что указанная формула является подходящей моделью для движения цены акции, но не для других базовых активов, таких как облигации, товары, процентные ставки и пр. Для них существуют свои собственные модели. В данной статье мы рассматриваем оценку опционов, имеющих в качестве базового актива исключительно акции (или фондовые индексы).

Excel в помощь

Сгенерировать случайную будущую цену акции можно в Excel. Основной вопрос: каким образом реализовать в этой программе генерирование нормально распределенной случайной величины $N_{0,1}$. Добиться этого можно несколькими способами, но мы рассмотрим только один из них.

Excel содержит функцию СЛЧИС(), которая генерирует случайную величину, имеющую

равномерное распределение от 0 до 1. Если ввести в любую ячейку формулу «=СЛЧИС()», а затем нажать на клавишу F9 для обновления листа, программа будет генерировать новое значение случайной величины, и число в ячейке будет «прыгать» от 0 до 1. Функцию СЛЧИС() можно использовать для генерирования случайной величины, имеющей нормальное распределение. Для этого в ячейку в Excel нужно ввести формулу «=НОРМОБР(СЛЧИС(); [матожидание]; [стандартное отклонение])». Для генерирования нормально распределенной случайной величины $N_{0,1}$ (имеющей нулевое матожидание и единичное стандартное отклонение), необходимо, соответственно, использовать формулу «=НОРМОБР(СЛЧИС();0;1)». При нажатии на клавишу F9 в этой ячейке будет генерироваться новое значение случайной величины. Кроме того, можно использовать формулу «=НОРМСТОБР(СЛЧИС())».

Для генерирования случайной будущей цены акции, следуя ранее приведенной формуле, в ячейку Excel следует ввести формулу «= S_0 »*EXP((ожидаемая доходность)-0,5*[волатильность]^2)*[срок]+[волатильность]*КОРЕНЬ([срок])*НОРМСТОБР(СЛЧИС())», указав значения соответствующих параметров. Теперь при нажатии F9 в данной ячейке будет генерироваться будущая случайная цена акции.

Конечно же, вводить формулу такой длины в Excel не очень удобно, поэтому проще создать функцию VBA (написанную на языке Visual Basic for Applications) (см. Код VBA).

Ваниль методом Монте Карло

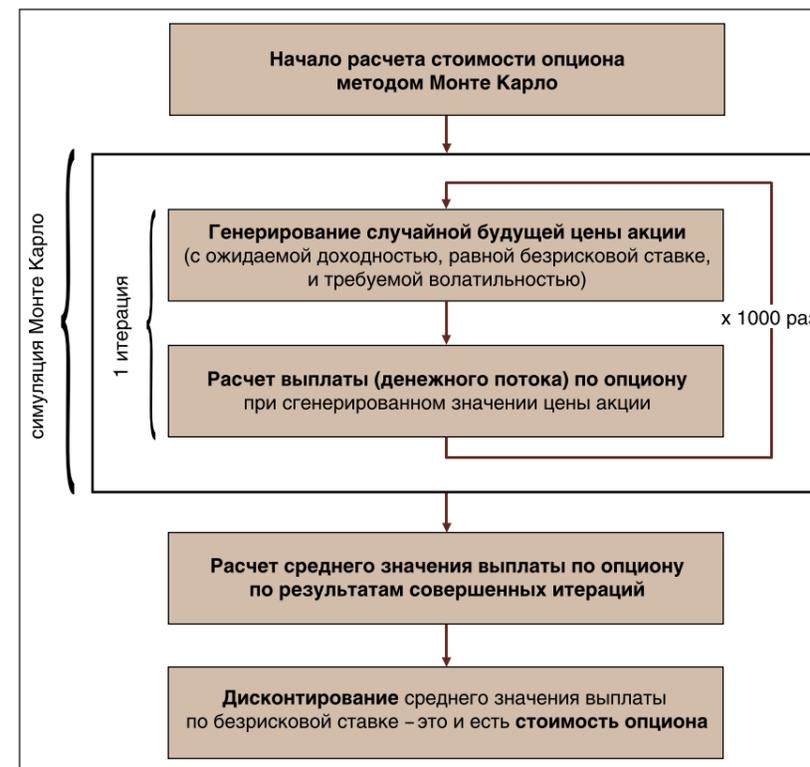
Теперь, когда мы умеем генерировать случайные значения цены акции, мы готовы к тому, чтобы оценивать опционы методом Монте Карло. Прежде всего, рассмотрим, как с его помощью оценить стоимость стандартного европейского опциона Call на акции «Газпрома». Данные для оценки опциона приведены в таблице 1.

Стоимость опциона с такими параметрами по формуле Блэка-Шоулза составляет 14,72 рубля. Конечно, нет никакого смысла использовать метод Монте Карло, когда мы можем воспользоваться аналитической формулой. Однако в данном случае наша цель – продемонстрировать, как работает данный метод, и показать, что результат, который он дает, полностью совпадает с результатом формулы Блэка-Шоулза.

Оценка опциона методом Монте Карло происходит по следующему плану:

- 1) Генерирование случайной будущей цены акции на дату истечения опциона, с использованием безрисковой ставки в качестве ожидаемой доходности акции (почему именно безрисковой ставки см. врезку «Мир, нейтральный к риску»);

Рис. 1 План оценки опциона методом Монте Карло



- 2) Расчет выплаты по опциону при данной цене акции. Шаги 1 и 2 образуют одну итерацию. Результатом итерации является значение интересующей нас случайной величины. В случае бросания кубика это было число выпавших очков, в данном случае – значение выплаты по опциону;
- 3) Шаги 1 и 2 повторяются много раз, например, 1000;
- 4) Рассчитывается среднее значение выплаты по опциону;
- 5) Среднее значение выплаты дисконтируется по безрисковой ставке, а полученный результат и будет оценкой справедливой стоимости опциона.

План оценки опциона методом Монте Карло продемонстрирован схематически на рисунке 1.

Таким образом, в соответствии с методом Монте Карло стоимость опциона – это дисконтированное значение математического ожидания выплаты по опциону, рассчитанное при ожидаемой доходности акции, равной безрисковой ставке.

Покажем, каким образом можно оценить стоимость ванильного опциона методом Монте Карло в Excel. Для расчетов нам нужно использовать следующие формулы:

- 1) «=100*EXP(GenerateRandomReturn(6%;30%;1))», генерирует случайную цену акции в Excel;
- 2) Рассчитывается выплата по опциону Call. Выплата по опциону = $\text{Max}(P_1 - \text{Strike}; 0) = \text{Max}(P_1 - 100; 0)$. При этом P_1 – генерируемая случайная цена акции в дату истечения опциона. Результаты расчетов в Excel приведены в таблице 2.

Программе Excel необходимо дать некоторое время, чтобы произвести генерирование 1000 случайных цен и рассчитать соответствующие выплаты по опциону. В результате проведения 1000 итераций мы получили среднее значение выплаты по опциону равное 15,4513 рубля. Продисконтировав это значение по безрисковой процентной ставке, мы получили 14,51513 рубля. Результат достаточ-

КОД VBA

Приведенная ниже функция VBA генерирует случайную доходность акции, которую можно использовать для оценки опционов методом Монте Карло.

Функция генерирует случайную доходность акции с заданной волатильностью и математическим ожиданием доходности для требуемого срока.

В основе данной функции лежит модель «геометрического броуновского движения», на которой основана модель Блэка-Шоулза и практически вся современная деривативная теория.

expectedReturn – ожидаемая годовая доходность акции.

volatility – волатильность акции.

years – срок, выраженный в годах. Например, если он равен 2, генерируется случайная доходность акции за 2 года.

Public Function

```
GenerateRandomReturn( _
    expectedReturn As Double,
    volatility As Double, years As Double)
As Double
```

Так мы указываем, что функция должна постоянно пересчитываться (при каждом нажатии на клавишу F9 или редактировании любой ячейки). Application.Volatile

Генерируем случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение, т. е. с нулевым матожиданием и единичным стандартным отклонением.

Application.WorksheetFunction. NormSInv соответствует функции Excel НОРМСТОБР().

Rnd – функция VBA, аналогичная функции Excel СЛЧИС().

```
Dim normalRandomValue As Double
normalRandomValue = Application.
```

```
WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
```

Случайная доходность акции.

```
Dim result As Double
result = _
    (expectedReturn - 0.5 * volatility ^ 2)
```

```
* years + _
    volatility * Sqr(years) *
    normalRandomValue
```

Возвращаем значение.

```
GenerateRandomReturn = result
```

End Function

МИР, НЕЙТРАЛЬНЫЙ К РИСКУ

При оценке опционов методом Монте Карло при генерировании случайной цены акции необходимо помнить об одной исключительно важной тонкости: в качестве ожидаемой доходности акции необходимо использовать не ее истинную ожидаемую доходность, а безрисковую ставку. Причина, по которой необходимо так поступать, не совсем очевидна и исходит из концепции так называемого «мира, нейтрального к риску» (risk-neutral world).

Попытаемся пояснить суть этой концепции. Представим себе, что мы живем в мире, в котором все инвесторы безразличны к риску, выражаемому в терминах волатильности. Единственное, что интересует инвесторов – это ожидаемая доходность актива. Например, если имеется 2 ценные бумаги – облигация с купоном в размере 6% и акция с ожидаемой доходностью 6% – обе ценные бумаги будут обладать одинаковой стоимостью, несмотря на то, что риск у них различный. В мире, нейтральном к риску, ожидаемые доходности всех активов будут равны безрисковой процентной ставке. Это будет связано с тем, что инвесторы не будут требовать дополнительной ожидаемой доходности по рискованным активам (т. е. «премия за риск» будет нулевой).

Опцион, соответственно, тоже будет иметь ожидаемую доходность равную безрисковой ставке, то есть в нашем примере 6%. Поэтому справедливая стоимость опциона будет равна математическому ожиданию его цены на дату истечения (т. е. выплата по опциону), дисконтированному по безрисковой ставке. Но самое главное, что в соответствии с деривативной теорией стоимость опциона в мире, нейтральном к риску, и нашем реальном мире будет идентичной. Именно поэтому мы можем использовать метод Монте Карло и оценивать опцион так, как если бы мы находились в risk-neutral world, но при этом использовать полученный результат в реальном мире. Это кажется невероятным, но доказывается математически.

Табл. 2 Результаты расчета стоимости ванильного опциона методом Монте Карло в Excel

Номер итерации	Случайная цена	Выплата по ванильному опциону
1	109,8740	9,8740
2	122,9802	22,9802
3	125,5773	25,5773
4	139,1359	39,1359
5	128,8718	28,8718
6	86,0788	0,0000
7	62,1292	0,0000
8	93,4175	0,0000
9	79,0119	0,0000
10	79,9989	0,0000
...
1000	84,2840	0,0000
Среднее значение выплаты		15,4513
Дисконтированное среднее значение выплаты		14,5515

но близок к значению 14,72 рубля, которое мы получили с помощью формулы Блэка-Шоулза.

Если провести 10 тыс. итераций, то результат будет намного более точным, а если 100 тыс. – точность повысится еще сильнее. Чем больше итераций совершить в рамках симуляции Монте Карло, тем ближе полученный результат будет к истинной стоимости опциона. В пределе, по мере роста числа итераций до бесконечности, метод Монте Карло дает результат, идентичный на 100% итогу, полученному с помощью формулы Блэка-Шоулза.

Увеличение точности оценки опциона с ростом количества итераций приводится на рисунке 2: по оси X отображается число совершенных итераций, а по оси Y – соответствующая ему стоимость опциона. График наглядно показывает, что чем больше итераций совершено, тем сильнее стоимость опциона приближается к своему истинному значению.

Производить симуляцию Монте Карло в Excel не очень удобно в связи с недостаточной высокой скоростью расчетов. Если 1000 итераций Excel выполняет относительно быстро (это занимает несколько

секунд), то для выполнения, скажем, 100 000 итераций (что может потребоваться для точной оценки экзотических опционов), Excel подходит очень плохо.

Поэтому в реальности для оценки опционов методом Монте Карло следует либо программировать функции оценки самостоятельно (на языке VBA, C++, C# или другом), либо использовать готовые функции (многие из которых доступны в виде Add-In'ов для Excel), либо использовать специальные программы, например, **калькулятор экзотических опционов МГ Софт**, доступный с апреля 2009 года для бесплатного скачивания по адресу www.mgsoft.ru.

Hedging costs

Метод Монте Карло интуитивно кажется очень понятным, практически, очевидным (не считая тонкости, связанной с использованием безрисковой ставки в качестве ожидаемой доходности акции), и могут возникнуть вопросы: почему, собственно говоря, стоимость опциона должна равняться именно дисконтированному матожиданию его выплаты? Что будет, если она отклонится от этого значения? Появится ли

возможность совершения арбитражной операции?

Да, появится. Хотя в чистом виде такая возможность будет иметься лишь в условиях теоретического мира Блэка-Шоулза (постоянная волатильность и процентная ставка, отсутствие комиссий и т. д.). Блэк и Шоулз показали, каким образом можно «воспроизвести» выплату по опциону, совершая покупку и продажу базовой акции по стратегии дельта-нейтрального хеджирования. И стоимость опциона – не что иное, как стоимость реализации этой стратегии или, говоря иначе, издержки по хеджированию опциона (hedging costs). Если опцион будет стоить дороже своей теоретической стоимости, можно будет его продать и, хеджируя по дельте, получить прибыль. Если будет стоить дешевле, его можно будет купить и также получить арбитражную прибыль. В условиях реального мира, конечно же, это осложняется рядом факторов, прежде всего, непостоянством волатильности.

Несмотря на то, что в методе Монте Карло ничего вообще не говорится об издержках по хеджированию, тем не менее, получаемое значение в точности равно этим издержкам. Таким образом, 2 совершенно разных подхода – расчет стоимости опциона через оценку издержек по его хеджированию и расчет ожидаемой выплаты по опциону – дают один и тот же результат. Причины этого, опять же, кроются в глубинах деривативной математики. Главный же практический вывод для нас состоит в том, что Монте Карло дает корректную оценку стоимости опциона.

Метод Монте Карло обладает следующими преимуществами и недостатками по сравнению с другими методами оценки опционов (см. табл. 3).

Заключение

В этой статье были изложены основы оценки опционов методом

Рис. 2 Увеличение точности оценки стоимости опциона методом Монте Карло с ростом количества итераций

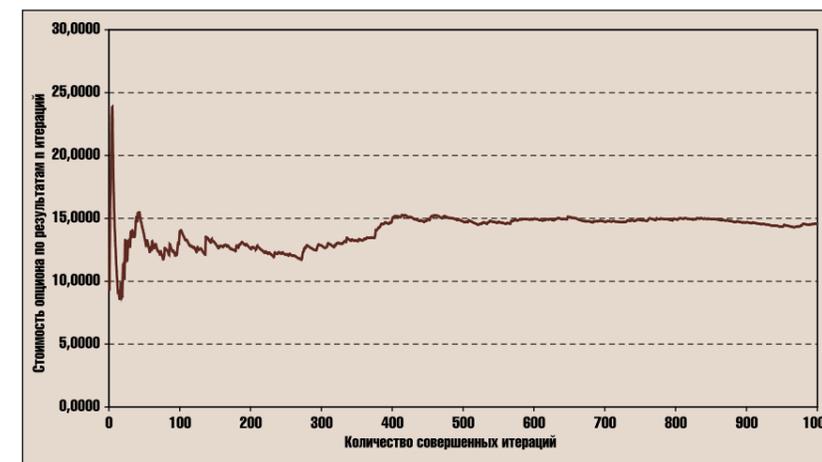


Табл. 3 Преимущества и недостатки метода Монте Карло

Преимущества	Недостатки
Интуитивно понятный – стоимость опциона есть, грубо говоря, сумма денег, которую мы в среднем заработаем, купив опцион.	Плохо подходит для оценки американских и других опционов с возможностью досрочного истечения.
Достаточно универсальный метод – позволяет оценивать почти любые опционы, в том числе экзотические (азиатские, барьерные и др.).	Для достижения высокой точности требуется совершить большое количество итераций, что требует больше времени по сравнению, например, с использованием формулы Блэка-Шоулза.
Не слишком сложен в реализации – можно реализовать оценку опционов методом Монте Карло в файле Excel или с помощью функций VBA.	

Монте Карло. Мы показали, каким образом генерировать случайные значения цен и как можно оценить стоимость стандартного опциона методом Монте Карло с помощью Excel. В следующем номере журнала мы покажем, как метод Монте Карло может использоваться для оценки практически любых экзотических опционов: азиатских, барьерных, lookback и многих других.

Все расчеты, приведенные в данной статье, содержатся в файле Excel, который может быть скачан по адресу www.mgsoft.ru/Files/VanillaOptionsMonteCarlo.xls. Данный файл позволяет оценивать стоимость ванильных опционов методом Монте Карло. Если у Вас возникнут вопросы по статье, можете обратиться к автору по адресу mikhail.glukhov@mgsoft.ru или mikhail@glukhov.ru **и** **F&O**

ПОЧЕМУ МОНТЕ КАРЛО?

Метод Монте Карло используется не только для оценки стоимости опционов, но и для решения широкого круга задач в математике, физике, экономике и других дисциплинах. Свое название он берет от города Монте Карло, расположенного в Монако и известного своими многочисленными казино, ведь рулетка, подобно игральному кубу, является одним из широко известных генераторов случайных чисел.